Ćwiczenia 4

3.1 (a) Zaproponuj algorytm sortujący ciągi 5-elementowe, optymalny ze względu na porównania (wykonujący możliwie najmniej porównań w pesymistycznym przypadku). Udowodnij poprawność swojego rozwiązania.

(b) Zaproponuj optymalny ze względu na porównania algorytm sortujący 6 różnych liczb a, b, c, d, e, f, o których wiadomo, że $a < b$ oraz $c < d$.

(c) Udowodnij, że do scalania dwóch ciągów uporządkowanych o długościach 2 i 5 potrzeba i wystarcza 5 porównań.

3.2 W tym zadaniu badamy algorytmy (turnieje), które polegają na wykonaniu ciągu porównań na elementach danych. Każde takie porównanie nazywamy pojedynkiem, a o elemencie większym w pojedynku mówimy, że jest jego zwycięzcą.

(a) Udowodnij, że każdy algorytm znajdujący przez porównania największy element w zbiorze n-elementowym, wykonuje w pesymistycznym przypadku co najmniej $n - 1$ pojedynków.

(b) Udowodnij, że w każdym algorytmie wyznaczania elementu największego w zbiorze n-elementowym element największy musi w pesymistycznym przypadku rozegrać co najmniej $\lceil \log n \rceil$ pojedynków.

(c) Udowodnij, że optymalny algorytm wyznaczania drugiego elementu co do wielkości wykonuje w pesymistycznym przypadku co najmniej $n + \lceil \log n \rceil - 2$ pojedynków, $n > 1$.

3.5 Dana jest n-elementowa tablica liczb całkowitych $a[1..n]$, o której wiadomo, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$|\{j : |a[j] - a[i]| \leqslant n\}| > \frac{n}{2020}.$$

Zaproponuj liniowy algorytm sortowania tablicy a.