Ćwiczenia 13

7.6 Niech A będzie skończonym, dynamicznie zmieniającym się ciągiem, którego elementami są liczby ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Podciąg kolejnych elementów A nazwiemy dobrym, gdy suma jego elementów jest równa 0. Podciąg jest super-dobry, gdy jest dobry i suma elementów w każdym jego prefiksie jest nieujemna.

Przykład: W ciągu $A = [1, 1, 0, -1, 0, 0, 1, -1, 1, 1, -1]$, podciąg $-1, 1, 1, -1$ jest dobry, ale nie super-dobry. Super-dobrym podciągiem jest na przykład $1, 0, -1$.

(a) Zaproponuj algorytm, który w czasie liniowym obliczy długość najdłuższego super-dobrego podciągu danego ciągu A.

(b) Zaproponuj strukturę danych, która pozwoli na wydajne wykonywanie następujących operacji na A:

- Ini(A):: $A := []$, *wykonywana tylko raz, na początku*
- Insert(A, e, i):: wstaw nowy element e jako i-ty element w A, $1 \leqslant i \leqslant |A| + 1$,
- Delete(A, i):: usuń i-ty element z A, $1 \leqslant i \leqslant |A|$,
- SuperGood(A, i, j):: sprawdź, czy podciąg $A[i..j]$ jest super-dobry, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant |A|$.

10.5 Kaktusem nazywamy graf, w którym każda dwuspójna składowa jest krawędzią lub cyklem.

(a) Zaprojektuj wydajny czasowo algorytm, który dla danego kaktusa G oraz wskazanych wierzchołków u i v obliczy liczbę różnych ścieżek elementarnych z u do v.

(b) Załóżmy, że krawędziom kaktusa przypisano całkowitoliczbowe wagi. Zaprojektuj wydajny czasowo algorytm, który w ważonym kaktusie $G = (V, E)$ znajduje minimalną wagę DFS drzewa rozpinającego zakorzenionego w zadanym wierzchołku s.

Uwaga: DFS drzewo rozpinające, to drzewo ukorzenione i takie, że krawędzie niedrzewowe łączą tylko potomków z przodkami w tym drzewie.

10.6 Grafy trójkątne to grafy spójne, w których każda dwuspójna składowa jest trójkątem (cyklem długości 3).

(a) Udowodnij, że każdy graf trójkątny jest 3-kolorowalny.

(b) Zaproponuj efektywny algorytm 3-kolorowania grafów trójkątnych.

(c) Zaproponuj efektywny algorytm obliczania rozmiaru najliczniejszego skojarzenia w danym grafie trójkątnym.

Do samodzielnej pracy

10.2 Dane jest drzewo z korzeniem T, które jest DFS-drzewem rozpinającym pewnego n-wierzchołkowego grafu G. Wierzchołki drzewa są identyfikowane z ich numerami DFS wyznaczającymi kolejność ich pierwszych odwiedzin. Dla każdego wierzchołka i różnego od korzenia, $t[i]$ jest numerem rodzica i w drzewie T. Wartość $t[\cdot]$ dla korzenia jest równa 0. Zaproponuj efektywny algorytm, który

(a) sprawdzi, czy graf G może być grafem dwuspójnym wierzchołkowo, a jeśli odpowiedź jest pozytywna, to poda

(b) minimalną liczbę krawędzi w grafie G,

(c) maksymalną liczbę krawędzi w grafie G.