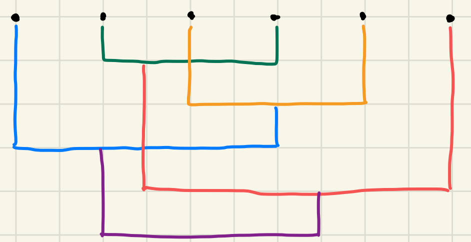
1.7.

* jak pokazać, że wybieranie dwóch najmniejszych elementów jako wynik wywołania funkcji Para jest optymalnym rozwiązaniem?

* załóżmy, że inna definicja Pary (ozn. Para') generuje mniejszy koszt dla funkcji Suma i spójrzmy na przykładowy przebieg tej procedury:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5 \leqslant x_6$$



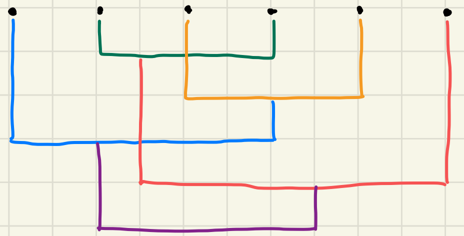
kolory odpowiadają wywołaniom funkcji Para' na zbiorze S

* jeśli zamienimy miejscami x_1 i x_5 w powyższym schemacie, to koszt Suma będzie nie większy niż początkowo – dlaczego?

* patrzymy na najmniejsze poddrzewo zawierające x_1 oraz x_5 i porównujemy jego koszt

$$(x_3+x_5) + (x_1+x_3+x_5) \geqslant (x_3+x_1) + (x_1+x_3+x_5)$$

$$x_5 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_1 \leqslant x_6$$



Schemat po zamianie x_1, x_5 miejscami

* stąd widać, że mając dany dowolny schemat można otrzymać schemat o takim samym lub mniejszym koszcie sumą przez przesunięcie x_1 (oraz x_2) do „pierwszych sumowanych par" w ich poddrzewach

* tak dostajemy schemat, który na początku sumuje x_1 z x_i, $i \neq 1$, i x_2 z x_j, $j \neq 2$

* jeśli $i = 2$ ($\Rightarrow j = 1$), to pokazaliśmy, że z danego schematu można dostać nowy, który ma nie większy koszt i na początku sumuje dwa najmniejsze elementy

* w przeciwnym przypadku możemy wykonać drugą modyfikację

* niech k oznacza ile razy suma $x_1 + x_i$ pojawia się w koszcie Suma, a l oznacza liczbę wystąpień $x_2 + x_j$
* jeśli $k \geq l$, zamieniamy x_i z x_2 - wtedy przy wyliczaniu kosztu zamienimy

$$k x_i + l x_2 \quad \text{na} \quad l x_i + k x_2,$$

czyli wartość zmieni się o $(k-l)(x_i - x_2) \geq 0$, bo jest to iloczyn dwóch liczb nieujemnych
* dla $k < l$ postępujemy analogicznie - zamieniamy x_j z x_1 i pokażemy, że koszt się nie zwiększył
* to kończy modyfikacje w pierwszym kroku, dalej postępujemy przez indukcję