Zadanie 5.5 a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 12 & 16 & 20 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dla danej macierzy A chcemy znaleźć bazy czterech fundamentalnych przestrzeni z nią związanych. Są nimi:

1. przestrzeń zerowa macierzy A — $N(A)$
2. przestrzeń wierszy macierzy A — $C(A^T)$
3. dualna przestrzeń zerowa macierzy A — $N(A^T)$
4. przestrzeń kolumn macierzy A — $C(A)$

Zaczynamy od 1 – przestrzenią zerową macierzy A jest przestrzeń, do której należą wszystkie wektory x, takie że $Ax = \mathbf{0}$, czyli iloczyn Ax daje wektor zer. U nas $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$, a $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$, bo A jest macierzą 3×4.

3 zera

Łatwo to zobaczyć, gdy zapiszemy iloczyn graficznie:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 12 & 16 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \overset{\text{ma być równe}}{=} Ax$$

Stąd, aby znaleźć x, wystarczy rozwiązać układ równań, który reprezentuje $Ax = 0$. Najpierw schodkujemy macierz A (po takim działaniu dostajemy układ równoważny). W tym procesie otrzymujemy kolejno

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 6w_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ w_3 - w_2 \end{array} \end{array}$$

Pamiętamy jednak, że cały czas odpowiada to układowi równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Innymi słowy, mamy:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 & \\ -2x_3 = 0 & \Rightarrow \quad x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 & \Rightarrow \quad x_4 = 0 \end{cases}$$

Z dwóch ostatnich równań wynika $x_3 = 0$ i $x_4 = 0$.

Stąd pierwsze upraszcza się do $x_1 + 2x_2 = 0$, co implikuje $x_1 = -2x_2$. Zmienna x_1 jest tutaj zmienną związaną (stoi przy wartości wiodącej), podczas gdy x_2 jest zmienną wolną. Za x_2 możemy więc wstawić dowolną wartość $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ogólna postać rozwiązania układu $Ax = 0$ to zatem $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2\alpha, \alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Jak wyznaczyć z ogólnej postaci bazę przestrzeni wszystkich rozwiązań? W ogólności będziemy mieli po jednym wektorze na każdą zmienną wolną. Tworzymy go przez podstawienie za tą zmienną jedynki, a za wszystkie inne zmienne wolne – zer. U nas jest jedna zmienna wolna, x_2, czyli w bazie będzie jeden wektor: $(-2, 1, 0, 0)$

Przechodzimy teraz do wyznaczenia drugiej przestrzeni.

Przestrzeń ② wierszy macierzy A to przestrzeń, do której należą wektory będące wierszami A oraz wszystkie ich możliwe kombinacje. U nas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 12 & 16 & 20 \end{bmatrix},$$

czyli do przestrzeni wierszy należą wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

oraz wszystkie inne postaci

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix},$$

gdzie α, β, γ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Bazę takiej przestrzeni znajdujemy przez schodkowanie macierzy A i wzięcie niezerowych wierszy. My już poschodkowaliśmy A i dostaliśmy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

czyli bazą przestrzeni wierszy A są np. wektory:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Aby wyznaczyć bazy przestrzeni 3 i 4, wykonujemy te same działania, tylko dla macierzy transponowanej A^T. Zaczynamy od 3 dualnej przestrzeni zerowej A, w której są takie wektory x, że $A^T x = \mathbf{0}$

Mamy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 12 & 16 & 20 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \\ 3 & 7 & 16 \\ 3 & 9 & 20 \end{bmatrix}$$

Szukamy zatem takich x, że

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \\ 3 & 7 & 16 \\ 3 & 9 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} = A^T x$$

Tak jak poprzednio, musimy teraz rozwiązać powyższy układ równań, czyli najpierw schodkujemy macierz A^T

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \\ 3 & 7 & 15 \\ 3 & 9 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 3w_1 \\ w_3 - 3w_1 \end{array} \end{array}$$

Pojawił się wiersz zerowy – przenosimy go na „koniec macierzy":

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} w_1 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_2 \end{array} \end{array}$$

Powyższa macierz jest już poschodkowana, co pozwala na szybkie rozwiązanie układu.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Układ wygląda zatem następująco:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ \quad -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ \qquad 2x_3 = 0, \end{cases}$$

zatem, wyznaczając zmienne od końca, dostajemy: $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$. Stąd w dualnej przestrzeni zerowej macierzy A jest tylko wektor zerowy $[0 \ 0 \ 0]^T$, czyli jest to podprzestrzeń zerowa $\mathbb{R}^3$.

Pozostaje wyznaczyć ④ przestrzeń kolumn macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 12 & 16 & 20 \end{bmatrix}$$

Jest to przestrzeń rozpięta przez wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Zauważamy jednak, że jest ona tym samym, co przestrzeń wierszy macierzy A^T. Jej bazą jest więc zbiór niezerowych wierszy w poschodkowanej macierzy A^T, czyli:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{baza: } \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

wiersz zerowy – nie bierzemy go

Pozostaje znaleźć wszystkie rozwiązania układu

$Ax = b$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 12 & 16 & 20 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = b \overset{\text{ma być równe}}{=} Ax$$

Aby to zrobić, najpierw schodkujemy macierz A, ale tym razem wykonujemy też operacje na wektorze b

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} w_1 \\ w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 6w_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 - w_2 \end{matrix}$$

Dostajemy zatem układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_3 = 2 \\ 2x_4 = -2 \end{cases}$$

Stąd, idąc od dołu dostajemy

$$x_4 = -1 \quad \text{i} \quad x_3 = -1,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania daje

$$x_1 + 2x_2 - 3 - 3 = 0$$

$$x_1 = -2x_2 + 6$$

Jednym z rozwiązań $Ax = b$ jest więc wektor $\tilde{x}$ równy $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 1, -1, -1)$, które dostajemy po podstawieniu 1 za zmienną wolną x_2.

Wszystkie rozwiązania $Ax = b$ można zapisać jako

$$\tilde{x} + N(A) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$