Zadania przygotowawcze do egzaminu

1. Układ równań $Ax = b$ nie ma rozwiązań. Znajdź przybliżone rozwiązanie p metodą najmniejszych kwadratów. Sprawdź, że wektor błędu $b - Ap$ jest prostopadły do kolumn macierzy A, gdzie
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2. Znajdź ortonormalną bazę stosując metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta do bazy:
$$b_1 = [1,1,1]^T, \quad b_2 = [1,2,3]^T, \quad b_3 = [2,2,1]^T.$$

3. Niech V_1 i V_2 będą płaszczyznami wyznaczonymi odpowiednio przez wektory a_1, a_2 oraz b_1, b_2, gdzie
$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Znajdź macierz P rzutowania $\mathbb{R}^3$ na płaszczyznę V_1.
   (b) Wyznacz prostą L będącą przecięciem płaszczyzn V_1 i V_2, podając wektor l wyznaczający L.
   (c) Znajdź wektor b należący do V_2 i prostopadły do L oraz wektor a będący jego rzutem na płaszczyznę V_1.

4. Stosując odpowiednie twierdzenie z wykładu wyznacz macierz odwrotną A^{-1} przy użyciu wyznaczników dla macierzy A
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Zastosuj wzory Cramera do rozwiązania następującego układu równań
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_3 &= -8 \\ 4x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

6. Oblicz objętość równoległościanu wyznaczonego przez następujące cztery wierzchołki
$$(1,1,1), \quad (5,4,2), \quad (7,8,8), \quad (2,3,5).$$
Wyznacz pozostałe wierzchołki tego wielościanu.

7. Znajdź macierz diagonalizującą S oraz postać A^k dla poniższej macierzy
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

zadanie 2. jest zadaniem 7.b) z serii 8.