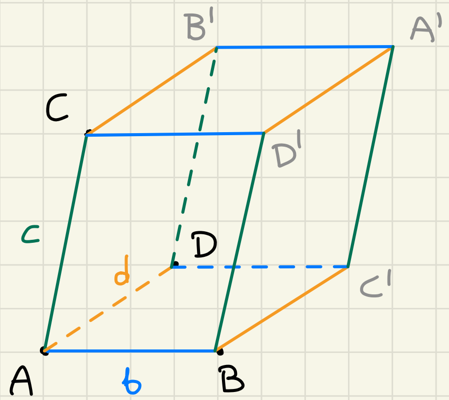
Zadanie 10.7

Mamy wyznaczyć objętość równoległościanu, który wyznaczają cztery dane wierzchołki. Zakładamy, że wierzchołek $(0,0,0,0)$ jest wierzchołkiem „środkowym" (połączonym z trzema pozostałymi) i przyjmujemy oznaczenia jak poniżej



$A = (0, 0, 0)$

$B = (-1, 2, 2)$

$C = (2, -1, 2)$

$D = (2, 2, -1)$

Obliczymy teraz współrzędne b, c, d

$$b = [-1, 2, 2]^T$$
$$c = [2, -1, 2]^T$$
$$d = [2, 2, -1]^T$$

A ma współrzędne zerowe, czyli nie trzeba nic odejmować tym razem

Aby wyznaczyć objętość, liczymy wyznacznik macierzy o kolumnach b, c, d

$$\det\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -1+8+8+4+4+4 = 27,$$

zatem dany równoległościan ma objętość równą 27.

Musimy jeszcze wyznaczyć pozostałe cztery wierzchołki. W tym celu zauważmy, że po dodaniu do A wektorów b, c, d przejdziemy do przeciwległego wierzchołka A'. Dzieje się tak niezależnie od kolejności, w jakiej dodajemy te wektory. Kolejność decyduje tylko o tym, przez które inne wierzchołki przechodzimy. Stąd:

$$A' = A+b+c+d = (3,3,3)$$

$$B' = A+c+d = (4,1,1)$$

$$C' = A+b+d = (1,4,1)$$

$$D' = A+b+c = (1,1,4)$$

są pozostałymi wierzchołkami.