

Zadanie 8.1. a)

kolumny A są liniowo niezależne

Wprowadzenie (intuiga i trochę teorii)

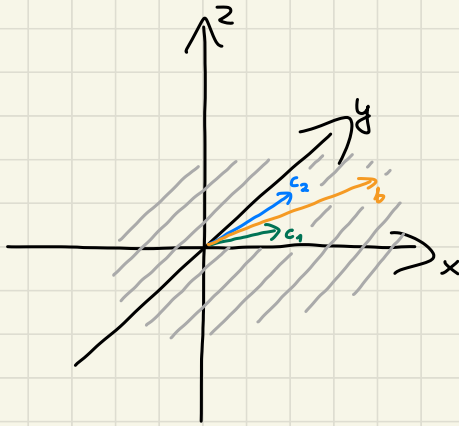
Zauważmy, że gdy układ równań $Ax = b$ ma rozwiązanie, to b musi być liniową kombinacją kolumn macierzy A , na przykład dla

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x$$
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = b$$

mamy

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ bo } 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$


W ogólności wszystkie wektory b , dla których układ $Ax = b$ ma rozwiązanie, tworzą przestrzeń rozpiętą przez kolumny macierzy A .



c_1 pierwsza kolumna A

c_2 druga kolumna A

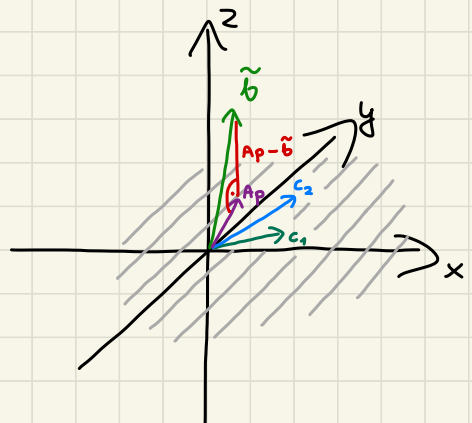
b wektor wyrazów
wdeanych

 przestrzeń rozpięta
przez c_1 i c_2

Stąd, jeśli \tilde{b} nie jest liniową kombinacją kolumn A , układ $Ax = \tilde{b}$ nie ma rozwiązań. Można jednak znaleźć rozwiązanie przybliżone, korzystając z metody najmniejszych kwadratów. Szukamy wtedy przybliżonego rozwiązania p , tak aby długość wektora błędu $Ap - \tilde{b}$ była jak najmniejsza.

Łatwo sprawdzić, że wektor błędu musi być prostopadły do przestrzeni kolumn. Z wykładu mamy:

$$p = (A^T A)^{-1} A^T \tilde{b}$$



Przechodzimy do zadania

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Widzimy, że kolumny A są liniowo niezależne, dlatego korzystamy z metody przedstawionej na wykładzie 7. (i przypomnianej na poprzednich stronach). Chcemy najpierw wyznaczyć przybliżone rozwiązanie $p = (A^T A)^{-1} A^T b$. Liczymy po kolei

① $A^T A$

③ $A^T b$

② $(A^T A)^{-1}$

④ p jako ② · ③

①

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A^T A$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \omega_2 \\ \omega_1 \end{array} \\
 &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \omega_1 \\ \omega_2 - 2\omega_1 \end{array} \\
 &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right] & \begin{array}{l} \omega_1 \\ -\frac{1}{3}\omega_2 \end{array} \\
 &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right] & \begin{array}{l} \omega_1 - 2\omega_2 \\ \omega_2 \end{array}
 \end{aligned}$$

czyli

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad A^T &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= A^T b
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad (A^T A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = p$$

Znaleźliśmy zatem przybliżone rozwiązanie p danego układu. Pozostaje pokazać, że wektor błędu $A p - b$ jest prostopadły do kolumn A

$$A \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = p$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie prostopadłości

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

Zadanie 8.1. c)

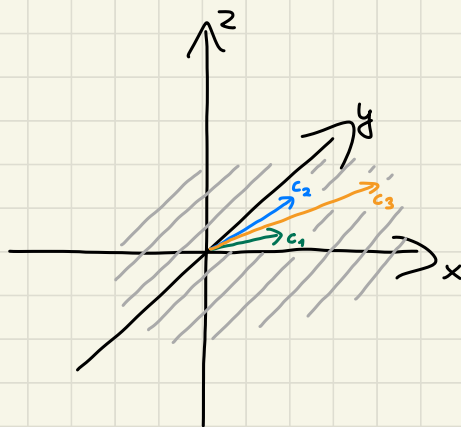
kolumny A są liniowo zależne

Wprowadzenie (intuiga i trochę teorii)

Tym razem zakładamy, że kolumny macierzy A nie są liniowo niezależne. Innymi słowy, co najmniej jedna kolumna jest kombinacją liniową pozostałych kolumn. Na przykład

$$A = \begin{bmatrix} \overset{c_1}{2} & \overset{c_2}{1} & \overset{c_3}{3} \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{mamy } c_3 = c_1 + c_2$$



Jak sobie z tym radzimy? Najpierw znajdujemy bazę przestrzeni kolumn (u nas np. c_1 i c_2).

Możemy to zrobić, schodkując A^T i sprawdzając, które wiersze się nie wyzerowały. W ten sposób wybieramy niezależne kolumny macierzy A

i wstawiamy je jako kolumny do nowej macierzy, którą oznaczymy przez B (kolumny te rozpinają przestrzeń kolumn macierzy A - o to nam chodzi).

Następnie szukamy przybliżonego rozwiązania układu $By = b$. Przykładowo z układu $Ax = b$ dla $b = [5, 5, 1]^T$ przechodzimy do układu

$$B \approx \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zastawiliśmy tylko liniowo niezależne kolumny c_1 i c_2 z A

i stosując metodę z poprzedniego punktu, dostajemy

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

przybliżone rozwiązanie

tutaj nie możemy dostać 1, tak jak w b , bo kolumny c_1 i c_2 mają zera na ostatniej pozycji

Mozna to interpretować tak, że najbliższym

wektorem wyrazów wolnych, dla którego podany

na początku układ ma już rozwiązanie, jest wektor $\bar{b} = [5, 5, 0]^T$. Pozostaje zatem tylko wrócić do macierzy A i zobaczyć, dla jakich x zachodzi $Ax = \bar{b}$.

To zadanie mamy już uproszczone, bo wiemy, że $B \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{b}$, a B zawiera dokładnie dwie pierwsze kolumny A . Jeśli więc zignorujemy trzecią kolumnę A , dostaniemy $A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{b}$.

Stąd $[2, 1, 0]^T$ jest jednym z rozwiązań układu $Ax = \bar{b}$, ale jest ich więcej. Na

początku zauważyliśmy, że kolumny A spełniają warunek $c_3 = c_1 + c_2$, czyli $1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 - 1 \cdot c_3 = 0$.

Przemnożenie A przez wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ daje zatem zerowy efekt (jest to rozwiązanie układu

jednorodnego $Ax = 0$). Dlatego ostatecznie wszystkie przybliżone rozwiązania to $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dla $d \in \mathbb{R}$.

Przejdźmy do zadania

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Zaczynamy od sprawdzenia, czy kolumny A są liniowo niezależne. W tym celu schodkujemy macierz A^T

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1 \end{array}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ w_3 - 2w_2 \end{array}$$

Trzecia kolumna jest zatem kombinacją dwóch pozostałych. Od tej pory będziemy więc rozważać macierz B złożoną z dwóch pierwszych kolumn A .

Przechodzimy do wyznaczenia przybliżonego rozwiązania r układu $By = b$. Robimy to

tak jak poprzednim razem $r = (B^T B)^{-1} B^T b$

① $B^T B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 166 & 188 \\ 188 & 214 \end{bmatrix}$$

② $(B^T B)^{-1}$

skorzystamy ze wzoru

(będzie na wykładzie 10.)

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Czyli mamy

$$\frac{1}{166 \cdot 214 - 188 \cdot 188} \begin{bmatrix} 214 & -188 \\ -188 & 166 \end{bmatrix} = \frac{1}{180} \begin{bmatrix} 214 & -188 \\ -188 & 166 \end{bmatrix}$$

③ $B^T b$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 37 \end{bmatrix}$$

④

$$\begin{bmatrix} 32 \\ 37 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{180} \begin{bmatrix} 214 & -188 \\ -188 & 166 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -108 \\ 126 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{10} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

W ten sposób otrzymaliśmy przybliżone rozwiązanie układu $By = b$. Odpowiada mu wektor wyrazów

wolnych

$$\begin{bmatrix} -\frac{6}{10} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{10} \\ \frac{11}{10} \\ \frac{14}{10} \\ \frac{17}{10} \end{bmatrix} = \bar{b}$$

Na koniec szukamy jeszcze przybliżonych rozwiązań układu $Ax=b$, czyli innymi słowy rozwiązań układu $Ax=\bar{b}$. W tym celu wystarczy znaleźć jedno (dowolne) rozwiązanie tego układu oraz rozwiązać układ jednorodny $Ax=0$. Przykładowym rozwiązaniem jest wektor $\begin{bmatrix} -6/10 \\ 7/10 \end{bmatrix}$ rozszerzony na trzeciej pozycji o zero (wynika to z poprzedniej strony)

$$\begin{bmatrix} -\frac{6}{10} \\ \frac{7}{10} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{10} \\ \frac{11}{10} \\ \frac{14}{10} \\ \frac{17}{10} \end{bmatrix}$$

Pozostaje rozwiązać układ jednorodny (następna strona)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - w_1 \end{array} \\
 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 - w_1 \\ w_3 - 2w_2 \\ w_4 - 3w_2 \end{array}$$

Szukane x opisane są przez równania: $-3x_2 - 6x_3 = 0$
 i $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. Z pierwszego mamy $x_2 = -2x_3$,
 co po podstawieniu do drugiego równania daje $x_1 = x_3$.
 Stąd rozwiązaniem układu jednorodnego jest każdy
 wektor $[d, -2d, d]^T$, $d \in \mathbb{R}$, a co za tym idzie
 przybliżone rozwiązania $Ax = b$ mają postać

$$\begin{bmatrix} -\frac{6}{10} \\ \frac{7}{10} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ -2d \\ d \end{bmatrix} \quad \text{dla } d \in \mathbb{R}.$$