Zadanie 8.2

(a) Zaczynamy od znalezienia macierzy P rzutowania $\mathbb{R}^3$ na płaszczyznę V_2. W tym celu definiujemy macierz A, tak aby zawierała wektory rozpinające V_2 jako kolumny, to znaczy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na wykładzie było pokazane, że wtedy

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T.$$

Liczymy kolejno:

① A^TA

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

② $(A^TA)^{-1}$

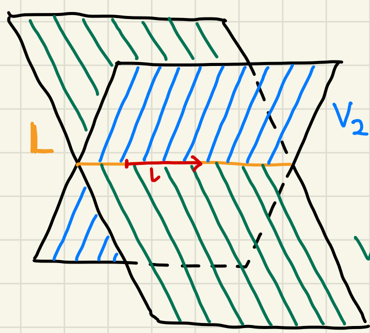
$$\left[\begin{array}{cc|cc}2&0&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&1\end{array}\right] \begin{array}{l}\frac{1}{2}w_1\\ w_2\end{array}$$

③ $A\,(A^TA)^{-1}\,A^T$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} = A^T$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\\\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}}_{=A(A^TA)^{-1}} \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

(b) Chcemy teraz znaleźć prostą L będącą przecięciem V_1 i V_2. W tym celu poszukamy zbioru wektorów, które należą do obu przestrzeni (to one leżą na prostej L, którą mamy znaleźć).



Wektory należące do V_1 są postaci

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{dla } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Podobnie dla V_2 są to wektory

$$\gamma \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{dla } \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Wektory należące zarówno do V_1, jak i do V_2 można zapisać w obu tych formach, czyli dla pewnych $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mamy

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \alpha = \delta \\ \beta = \gamma \end{cases}$$

Z pierwszego i ostatniego równania dostajemy więc $\alpha = \gamma = \beta$, czyli wektory te mają wszystkie współrzędne takie same.

Stąd prostą L rozpina na przykład wektor $l = [1,1,1]^T$.

Pozostaje tylko znaleźć wektor $b \in V_1$ i prostopadły do L. Z pierwszego warunku $b = [\alpha, \alpha, \beta]^T$ dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Aby zaszedł drugi warunek, iloczyn skalarny b i l musi być równy zeru. Oznacza to że $\alpha + \alpha + \beta = 0$, czyli $\beta = -2\alpha$. Za wektor b możemy zatem wziąć wektor $[1,1,-2]^T$ (odpowiadający $\alpha = 1$).

(c) Na koniec mamy jeszcze wyznaczyć kilka kątów między wektorami. Aby to zrobić, skorzystamy ze wzoru na cosinus kąta Θ między wektorami a i b (wykład 7.)

długość wektora

$$\cos\Theta = \frac{a^T b}{\|a\| \cdot \|b\|}, \quad \text{gdzie} \quad \|a\| = \sqrt{a^T a}.$$

Wyznaczymy kąt między a_1 i Pa_1.

Zaczynamy od policzenia Pa_1

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

oraz iloczynu skalarnego $a_1^T \cdot (Pa_1)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \end{array}$$

a także długości wektorów a_1 i Pa_1

$$\|a_1\| = \sqrt{a^T \cdot a} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\|Pa_1\| = \sqrt{1/4 + 1 + 1/4} = \sqrt{6/4} = \sqrt{3/2}.$$

Pozwala to już na wyliczenie cosinusa

$$\cos(a_1, Pa_1) = \frac{a_1^T \cdot (Pa_1)}{\|a_1\| \cdot \|Pa_1\|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

a zatem kąt między wektorami to $30°$.

Pozostałe kąty zostają jako zadanie do pracy samodzielnej. Tutaj odpowiemy jeszcze tylko na pytanie, czy któryś z tych kątów jest kątem między płaszczyznami V_1 i V_2.

Tak, jest to kąt pomiędzy b i Pb. Wynika to z konstrukcji wektora b – jest to wektor należący do przestrzeni V_1 oraz prostopadły do lini przecięcia V_1 i V_2. Z kolei Pb to jego rzut na V_2.