Zadanie 8.3

Aby znaleźć macierz P rzutowania $\mathbb{R}^3$ na płaszczyznę V, korzystamy ze wzoru

$$P = A\,(A^T A)^{-1} A^T,$$

gdzie A jest macierzą, w której kolumny wpisane są wektory rozpinające V. Mamy zatem

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

① $A^T A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix}$$

② $(A^TA)^{-1}$

skorzystamy ze wzoru (będzie na wykładzie 10.)

$$\left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

czyli mamy

$$\frac{1}{14\cdot 77 - 32\cdot 32}\cdot\begin{bmatrix} 77 & -32 \\ -32 & 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{54}\cdot\begin{bmatrix} 77 & -32 \\ -32 & 14 \end{bmatrix}$$

③ $A\,(A^TA)^{-1}\,A^T$

na razie pominiemy mnożenie przez $\frac{1}{54}$, wrócimy do niego po przemnożeniu samych macierzy

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} 77 & -32 \\ -32 & 14 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -51 & 24 \\ -6 & 6 \\ 39 & -12 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 45 & 18 & -9 \\ 18 & 18 & 18 \\ -9 & 18 & 45 \end{bmatrix} \end{array}$$

teraz kończymy obliczenia, mnożąc wynikową macierz przez $\frac{1}{54}$

$$\frac{1}{54} \cdot \begin{bmatrix} 45 & 18 & -9 \\ 18 & 18 & 18 \\ -9 & 18 & 45 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Mając macierz rzutowania P, możemy prosto znaleźć rzut wektora $c = [1, 0, 0]^T$ na V. Jest to wektor Pc

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Musimy teraz sprawdzić, że otrzymany wektor Pc rzeczywiście należy do V (jako rzut na tę przestrzeń).

W tym celu rozwiązujemy układ równań $Ax = P_C$ (jeśli P_C należy do V, to można je zapisać jako kombinację wektorów rozpinających V, czyli mamy $P_C = x_1 \cdot a + x_2 \cdot b$ dla pewnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, a dokładnie to opisuje nasz układ – szukamy x_1, x_2)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & \frac{5}{6} \\ 2 & 5 & \frac{2}{6} \\ 3 & 6 & -\frac{1}{6} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & \frac{5}{6} \\ 0 & -3 & -\frac{8}{6} \\ 0 & -6 & -\frac{16}{6} \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 3w_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \\ -\frac{1}{3} w_2 \\ w_3 - 2w_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{17}{18} \\ 0 & 1 & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 - 4w_2 \\ w_2 \\ w_3 \end{array}$$

Czyli $x_1 = -\frac{17}{18}$, $x_2 = \frac{4}{9}$, co pokazuje, jaką kombinacją wektorów a i b jest P_C.

Udowodnimy teraz, że wektor $c - Pc$ jest prostopadły do płaszczyzny V (czyli do wektorów a i b). Mamy

$$c - P_c = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{2}{6}\\-\frac{1}{6}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\-\frac{2}{6}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

zatem

$$\begin{array}{ccc} & a = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} & b = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} \\ \begin{matrix}c - P_c\\ \shortparallel \\ \begin{bmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\end{matrix} & \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\ \checkmark & \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\ \checkmark \end{array}$$

Na koniec pozostaje wyznaczyć kąt między prostą wyznaczoną przez c i płaszczyzną V, czyli między c i P_c

$$c^T \cdot (P_c) = 1 \cdot \frac{5}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$$

$$\|c\| = \sqrt{1 \cdot 1} = 1$$

$$\|P_c\| = \sqrt{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{25 + 4 + 1} = \frac{1}{6}\sqrt{30}$$

$$\cos(c, P_c) = \frac{c^T \cdot (P_c)}{\|c\| \cdot \|P_c\|} = \frac{\frac{5}{6}}{1 \cdot \frac{1}{6}\sqrt{30}} = \frac{5}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$