Zadanie 8.7. a)

W tym zadaniu chcemy przekształcić bazę

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

w bazę ortonormalną. Oznacza to, że w nowej bazie wektory muszą być parami prostopadłe (ortogonalne) oraz każdy z nich musi być długości 1 (znormalizowany). W tym celu zdefiniujemy kolejno wektory p_1, p_2 oraz p_3 (bazując na a_1, a_2, a_3), przy użyciu ortogonalizacji Grama - Schmidta.

Zaczynamy od pierwszego wektora - od a_1. Na jego podstawie chcemy wyznaczyć pierwszy wektor, p_1, nowej bazy. Aby to zrobić, dzielimy wektor a_1 przez jego długość.

Dzięki temu otrzymany wektor p_1 będzie miał długość 1 – będzie znormalizowany. Długością wektora a (ozn. $\|a\|$) jest pierwiastek z jego iloczynu skalarnego przez samego siebie, zatem:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \|a_1\| = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = \sqrt{2}$$

oraz

$$p_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 1, 0]^T$$

W ten sposób otrzymaliśmy pierwszy wektor nowej bazy. Drugi wektor, p_2, otrzymamy na podstawie a_2. Wektor p_2 musi być jednak nie tylko długości 1, ale dodatkowo musi być prostopadły do p_1. Dlatego tym razem najpierw rzutujemy a_2 na p_1, otrzymując wektor $P_1 a_2$ (o P_1 można tutaj myśleć jako operatorze / funkcji rzutującej dany wektor na p_1), a następnie odejmiemy $P_1 a_2$ od a_2. Dzięki temu zostaniemy z częścią a_2, która jest prostopadła do p_1. Pozostanie ją tylko znormalizować. Mamy kolejno:

$$P_1 a_2 = \underbrace{(p_1^T a_2)\, p_1}_{} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, p_1 = \frac{1}{2}[1, 1, 0]^T$$

wzór na rzutowanie a_2 na prostą rozpiętą przez wektor p_1

bo: $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1, 0]}_{p_1^T} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1$$

$$a_2 - P_1 a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\| a_2 - P_1 a_2 \| = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{3/2}$$

$$p_2 = \frac{a_2 - P_1 a_2}{\| a_2 - P_1 a_2 \|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot [1/2, -1/2, 1]^T$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}[1, -1, 2]^T$$

Podobnie robimy, aby otrzymać ostatni wektor, p_3, w nowej bazie. Tym razem od wektora a_3 musimy jednak odjąć rzuty zarówno na p_1 jak i na p_2 (operator rzutowania oznaczymy przez P_2). Mamy:

$$P_2 a_3 = \underbrace{(p_1^T a_3)\, p_1}_{\text{rzut } a_3 \text{ na } p_1} + \underbrace{(p_2^T a_3)\, p_2}_{\text{rzut } a_3 \text{ na } p_2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 1, 0]^T + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} [1, -1, 2]^T$$

$$= \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right]^T + \left[\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]^T$$

$$= \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]^T$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[1 \ \ 1 \ \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \qquad \frac{1}{\sqrt{6}}[1, -1, 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 1$$

$$a_3 - P_2 a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\| a_3 - P_2 a_3 \| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{3 \cdot \frac{4}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

zatem

$$p_3 = \frac{a_3 - P_2 a_3}{\| a_3 - P_2 a_3 \|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right]^T$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-1, 1, 1 \right]$$

Stąd szukaną bazą jest na przykład

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$